La découverte des nombres complexes

Au XVI^e siècle, les algébristes italiens apprennent à résoudre les équations du troisième degré. Ils les ramènent à une autre équation plus simple du second degré dont la résolution est connue depuis le IX^e siècle grâce aux mathématiciens arabes. C'est au cours de cette recherche que vont apparaître de nouveaux nombres...

1- Si on sait factoriser un polynôme du troisième degré $P(x)$, alors on sait résoudre l'équation du troisième degré $P(x) = 0$.

Exemple : A l'aide d'une factorisation, résoudre l'équation $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.

2- Si on connaît une solution d'une équation du troisième degré, alors on peut facilement trouver les autres solutions.

Pour cela, on utilise le fait que si un nombre α est racine d'un polynôme $P(x)$, alors on peut factoriser $P(x)$ par $(x-\alpha)$.

Exemples : Résoudre les équations suivantes :

$$x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = 0 \qquad\qquad 2x^3 - 5x^2 - 2x - 3 = 0$$

3- Toute équation du troisième degré peut se ramener à une équation de la forme $x^3 = px + q$.

On veut résoudre l'équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, où a, b, c et d sont des nombres réels fixés.

Si $a = 0$, l'équation est de degré inférieur ou égal à 2, donc on sait la résoudre.

Si $a \neq 0$, on peut diviser chaque membre de l'équation par a, pour obtenir une équation de la forme $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

Question : Dans l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, faire le changement d'inconnue $X = x + \frac{a}{3}$, et démontrer que X vérifie une équation de la forme $X^3 = pX + q$.

Ainsi, si on sait résoudre les équations de la forme $x^3 = px + q$, alors on sait résoudre toutes les équations du troisième degré.

Exemple : Appliquer ceci au cas de l'équation $x^3 + 3x^2 - 3x - 25 = 0$ (sans chercher à résoudre l'équation).

4- La méthode de Cardan pour résoudre l'équation $x^3 = px + q$.

Parallèlement à ses activités de médecin, astrologue, mage, joueur et inventeur, Jérôme Cardan (1501-1576) publie en 1545, dans *Ars Magna*, cette méthode de résolution de certaines équations du troisième degré. Cardan fut initié très jeune aux mathématiques par son père, ami de Léonard de Vinci. Le véritable découvreur de la méthode fut en fait Nicolas Tartaglia (1500-1557). Ce dernier avait découvert la méthode suite à des défis mathématiques en 1539. Il avait ensuite transmis à Cardan la méthode en lui demandant de ne pas la révéler. Cependant, Cardan s'aperçut que d'autres mathématiciens de l'époque connaissaient cette méthode, et décida finalement de la publier. Une violente querelle éclata alors entre Cardan et Tartaglia. En 1548, Ludovico Ferrari, élève de Cardan, découvre une méthode de résolution des équations du 4ème degré.

On va résoudre l'équation $x^3 = 6x + 20$ ❶ par la méthode de Cardan.

a) On pose $x = u + v$. Que devient l'équation ❶ ?
   Quelle valeur suffit-il de donner au produit uv pour que l'équation ❶ s'écrive $u^3 + v^3 = 20$?
   Que vaut alors le produit $u^3 v^3$?
b) On pose $U = u^3$ et $V = v^3$.
   Déterminer la valeur de U et de V.
   En déduire la valeur de u et de v, puis celle de x.
c) En utilisant une fonction et en étudiant son sens de variation, démontrer que l'équation ❶ ne possède qu'une seule solution.

La méthode de Cardan conduit cependant dans certains cas à un paradoxe que Bombelli va essayer de surmonter

5- L'idée de Bombelli lorsque la méthode de Cardan échoue

On considère l'équation $x^3 = 15x + 4$

Question : Quel problème rencontre-t-on lorsqu'on applique la méthode de Cardan à cette équation ?

Cette équation possède pourtant une solution simple, que la méthode de Cardan n'a pas réussi à déterminer. **Laquelle ?**

L'idée de Raphaël Bombelli (1526-1572) est de considérer un nombre imaginaire dont le carré serait égal à -1. On notera provisoirement ce nombre $\sqrt{-1}$.

Question : A l'aide de ce nombre imaginaire, poursuivre la méthode de Cardan et retrouver la solution simple obtenue précédemment. Indication : on calculera $\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3$.

Cardan

Tartaglia